Bibliographie

Demetrios A. Kappos, Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -Räume (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 24), 136 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.

Die Idee, die Wahrscheinlichkeit als ein Maß auf einer Booleschen Algebra zu definieren, stammt ursprünglich von W. I. GLIVENKO[1]). Zur selben Zeit hat C. CARATHÉODORY[2]) eine Maß- und Integraltheorie auf Booleschen Algebren entwickelt. Diese Richtung wurde seitdem wesentlich weiterentwickelt, hauptsächlich durch den Verfasser des vorliegenden Buches, ferner von A. N. KOLMOGOROFF[3]) und von anderen. Es ist wohlbekannt, daß diese Auffassung gewisse Vorteile hat: zum Beispiel gibt es in dieser Auffassung keinen Unterschied zwischen dem unmöglichen Ereignis und einem Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit Null.

Das Buch besteht aus 8 Kapiteln. Im I. Kapitel wird der Begriff eines Wahrscheinlichkeitsfeldes (kurz: w-Feldes) eingeführt. Ein w-Feld ist ein Boolescher Ring F mit Einheit, auf welchem eine strikt positive, normierte und additive Funktion w, die Wahrscheinlichkeit definiert ist. Falls von w statt strikter Positivität nur Nichtnegativität verlangt wird, spricht man von einem Quasi-w-Feld. Es folgen einige Beispiele und Existenzsätze; das Kapitel endet mit dem Stoneschen Darstellungssatz.

Kapitel II beschäftigt sich mit unendlichen Operationen in w-Feldern. Die w-Felder (F, w), wo F ein σ-Boolescher Ring und w σ-additiv ist, werden σ-w-Felder gennant. Die Frage der Erweiterung eines w-Feldes zu einem σ-w-Feld wird gründlich diskutiert.

Kapitel III beschäftigt sich mit dem Verhältnis der in den ersten zwei Kapiteln entwickelten Theorie der Wahrscheinlichkeitsfelder zu der Kolmogoroffschen Wahrscheinlichkeitstheorie. Sind Ω eine nichtleere Menge, K ein Boolescher Ring, der aus Teilmengen von Ω besteht und selbst Ω als Element enthält, und v eine stetige Quasi-Wahrscheinlichkeit auf K, so wird $[\Omega, K, v]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (kurz: w-Raum) genannt.

Es wird gezeigt, daß jedes w-Feld durch einen w-Raum dargesellt werden kann, derart, daß die Wahrscheinlichkeit bei dieser Darstellung die Eigenschaft der σ-Additivität besitzt, weiter, daß umgekehrt man aus einem w-Raum durch Bildung von Restklassen modulo Nullmengen in ein w-Feld übergehen kann. Die beiden Theorien sind also äquivalent.

Kapitel IV bis VI beschäftigen sich mit dem Begriff des Cartesischen Produkts von w-Feldern, und mit dem Begriff der Unabhängigkeit.

Kapitel VII beschäftigt sich mit topologischen bzw. kompakten w-Räumen.

Kapitel VIII beschäftigt sich mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeitsräumen[4]) (kurz: bedingte w-Räume). Es sei Ω eine nichtleere Menge, K ein σ-Körper von Teilmengen von Ω, der auch Ω als Element enthält, und T ein nichtleeres Untersystem von K. Auf dem Cartesischen Produkt $K \times T$ sei eine nichtnegative Funktion $P(A|B)$ $(A \in K, B \in T)$ definiert, für die $P(B|B)=1$ für $B \in T$ gilt und die bei festem B als Funktion von A ein σ-additives Maß auf K ist, und für welche

---

[1]) W. I. GLIVENKO, Théorie générale des structures, *Actualités Sci. et Industr.*, Nr. 652 (Paris, 1938).

[2]) C. CARATHÉODORY, Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffes, *Sitzungsber. Math.-Naturw. Klasse Bayer. Akad. Wiss. München*, **1938**, 24—28.

[3]) A. KOLMOGOROFF, Algèbres de Boole métriques complètes, *VI. Zjazd Matematyków Polskich, Kraków*, **1950**, 22—30.

[4]) Siehe A. RÉNYI, On a new axiomatic theory of probability, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 285—335 und A. RÉNYI, On conditional probability spaces generated by a dimensionally ordered set of measures, *Teorija Verojatn. Prim.*, **1** (1956), 61—71.

aus $A \in K$, $B \in K$, $C \in T$ und $BC \in T$ folgt: $P(A|BC)P(B|C) = P(AB|C)$. Dann wird $[\Omega, K, T, P]$ ein bedingter w-Raum und $P(A|B)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B genannt. Die Frage der Erweiterung eines bedingten w-Raumes wird diskutiert, es werden ferner diejenigen bedingten w-Räume charakterisiert, welche vom einfachen Quotiententypus sind, d. h. für welche ein σ-additives Maß μ auf K gibt, derart, daß $\mu(B) > 0$ für $B \in T$ gilt und

$$P(A|B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}$$

für jede $A \in K$, $B \in T$ ist. Ferner werden die Resultate von Á. Császár[5]) (dessen Name an mehreren Stellen falsch gesetzt wurde) über die Erzeugung von allgemeinen bedingten w-Feldern durch eine Familie von σ-additiven Maßen dargestellt.

Das Buch enthält einen Anhang, in welchem die nötigen algebraischen Vorkenntnisse zusammengestellt sind, ferner ein Literaturverzeichnis von 65 Arbeiten, und ein Namen- und Sachverzeichnis.

Das sehr klar und sorgfältig geschriebene, wertvolle und nützliche Buch, in welchem alle das Thema betreffenden Ergebnisse zum ersten Male gesammelt, systematisch dargestellt, miteinander verglichen und in vieler Hinsicht ergänzt sind, kann jedem, der sich für die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert, warm empfohlen werden.

A. Rényi (Budapest)

G. Scorza Dragoni, Elemente di analisi matematica. Vol. I. **Elementi di algebra,** VIII+584 p.; Vol. II. **La continuità e la differenziabilità,** VI+692 p.; Vol. III. **La teoria elementare dell'integrazione,** VI+584 p., Padova, CEDAM, 1961—62. — Lit. 5000+6000+5000.

Das dreibändige ausgezeichnete Lehrbuch des Verfassers umfaßt das übliche Material der einleitenden Algebra- und Analysisvorlesungen an den Universitäten. Das Lehrbuch verdient deshalb eine besondere Aufmerksamkeit, da es die strengsten Anforderungen der mathematischen Exaktheit immer vor Augen hält, und diese Exaktheit mit einer klaren, pädagogisch durchdachten Vortragsmethode verbindet. Obwohl das behandelte Material als klassisch angesehen werden kann, ein anderer großer Vorteil des Buches ist, daß es die eingeführten Begriffe — den Möglichkeiten angemessen — von dem Standpunkt der gegenwärtigen Lage der Wissenschaft behandelt.

Der erste Band beginnt mit der Untersuchung der Mengen, dann baut er die reellen und komplexen Zahlenkörper axiomatisch auf. Danach folgen die Grundbegriffe der Kombinatorik, der Determinantentheorie und der Matrizenrechnung. Es kommen weiterhin die Grundlagen der Gruppen-, Ring- und Körpertheorie, die lineare Unabhängigkeit und Abhängigkeit vor, dann folgt die Behandlung der Lösbarkeit der linearen Gleichungssysteme. Es wird ein Kapitel den numerischen linearen Räumen, vier Kapitel den Euklidischen Räumen gewidmet. Ein Kapitel befaßt sich mit über dem reellen bzw. komplexen Zahlenkörper definierten ein- und mehrveränderlichen Polynomen, dann folgt eine didaktisch wertvolle Beweisführung des Grundsatzes der Algebra in mehreren Schritten. Dem folgt die Untersuchung der über dem rationalen bzw. reellen Zahlenkörper definierten algebraischen Gleichungen. Der erste Band schließt mit der Einführung in die Theorie der quadratischen Formen.

Der zweite Band beginnt mit der Behandlung der Punktmengen in den Euklidischen Räumen. Dem folgen die Begriffe und Sätze der Grenzwerte in der Reihenfolge: Zahlenfolge, Zahlenreihen, reelle und komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen. Es folgen die Stetigkeit der Funktionen einer Veränderlichen und die damit zusammenhängenden Sätze. Das folgende Kapitel behandelt die Grenzwerte der Funktionen mehrerer Veränderlicher, ihre Stetigkeit, ihre Halbstetigkeit und ihre Transformationen. Weiterhin wird der Grenzwert und die Stetigkeit der Funktionen einer komplexen Veränderlichen behandelt. Anschließend werden die Begriffe der unendlich kleinen bzw. unendlich großen Werte eingeführt. In den folgenden Kapiteln kommen die Begriffe der Ableitung und des Differentials der Funktionen einer reellen Veränderlichen, sowie der Begriff der Stammfunktion zur Betrachtung. Im folgenden wird die Differentialrechnung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen verallgemeinert (Extremenrechnung, Funktionenfolgen,

[5]) Á. Császár, Sur la structure des espaces de probabilité conditionnelle, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 337—361.

Funktionenreihen, usw.). Es folgen die linearen Transformationen und die impliziten Funktionen, dann die Behandlung der funktionellen Abhängigkeit und Unabhängigkeit, die Betrachtung der Extreme mit Nebenbedingungen.

Die letzten fünf Kapitel des zweiten Bandes sind den Problemen der Orientierung in der Ebene und im Raum, der Untersuchung der Polygone, der Polyeder, der Kurven, Flächen und Körper gewidmet. Die Behandlung dieser Probleme ist hier wesentlich detaillierter, als in den meisten anderen Werken dieser Art.

Der dritte Band wird mit dem Integralbegriff Mengoli — Cauchy eingeleitet und dann geht er auf die Behandlung des Riemannschen Integrals über. Die Kurvenintegrale werden nach der Einführung der Rektifizierbarkeit von Kurven behandelt, dann befaßt sich der Band mit der Integration der linearen Differentialformen. Dem folgen einige Probleme der Berechnung von bestimmten Integralen. Anschließend wird die Laplace-Transformation untersucht. In drei Kapiteln werden die Theorie und Lösungsmethoden der gewöhnlichen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme, in einem Kapitel einige wichtige partielle Differentialgleichungen behandelt; es schließen sich die Grundtatsachen der trigonometrischen Reihen an. Der dritte Band behandelt noch das Maß der ebenen und räumlichen Mengen, Doppel-, dreifache, sowie Oberflächenintegrale.

Die Behandlungsmethode des Buches ist im allgemeinen detaillierter als in den meisten anderen Lehrbüchern. Didaktisch gesehen gelingt die Behandlung der Elemente der Funktionentheorie parallel mit der reellen Analysis ausgezeichnet. Der Gebrauch des Buches wird durch seine Übersichtlichkeit, durch die gute Gliederung der komplizierten Teile und durch die klare und exakte Ausdrucksweise erleichtert.

A. Kósa (Budapest)

Ákos Császár, Foundations of general topology, 380 pages, Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1963.

Ákos Császár, Grundlagen der allgemeinen Topologie, 368 Seiten, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1963.

Translations, by Mrs. K. Császár, of the first (French) edition (*Fondaments de la topologie générale*, reviewed in *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 321).

Some minor changes have been effected nearly in all chapters, three chapters (8, 15, 16) have been essentially rewritten, and four new chapters (17, 18, 19, 20) have been added. Chapters 17, 18 study the question of embedding syntopogenous spaces into cubes, i. e. into the Cartesian product of copies of the interval [0, 1], supplied with a suitable syntopogenous structure. For that reason the notion of the *rank function* of a syntopogenous structure has been introduced, the definition of which is based on the idea of weight of a topogenous order, which is a generalization of the notion of weight of a topological or proximity space. In chapter 19 the notion of a totally bounded syntopogenous space has been introduced, generalizing the idea of totally bounded metric and uniform spaces. Finally, in chapter 20, some supplementary remarks have been made concerning metrizable spaces.

The author expresses his indebtedness to the late J. Czipszer for his contributions to the completion of this book. Chapters 17. 18 and 19 are almost entirely due to Czipszer and contain his unpublished results.

L. Gehér (Szeged)

J. Horn—H. Wittich, Gewöhnliche Differentialgleichungen (Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik, Bd. 10), 6. Auflage, 275 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1960.

As the number of the editions shows, this book is a well proved popular introduction into the theory of ordinary differential equations. The systematizing of the subject-matter, which is exemplary in didactical respect, the simplicity of the proofs, the great number of problems solved and examples given make this book suitable not only for students interested in differential equations and in their applications, but for teachers too.

In this edition there were made several changes. Especially the chapters considering differential equations in the complex domain and special functions satisfying some ordinary differential equations e. g. the Bessel differential equation were rewrited and extended. Also are improved the chapters dealing with the dependence of the solutions on a parameter and the initial conditions, and with the singularities of nonlinear differential equations.

The chapters are: elementary integration methods; existence of solutions; method of successive approximations; numerical and graphical approximation methods; linear differential equations; existence of solutions in the complex domain; linear differential equations of the second order; dependence of solutions on parameters and initial conditions; singularities of nonlinear differential equations; differential equations with periodic coefficients.

L. Pintér (Szeged)
Lajos

Martin Barner, Differential- und Integralrechnung, I, Grenzwertbegriff, Differentialrechnung (Sammlung Göschen, Band 86/86 a), 176 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1961.

In diesem kleinen Buch werden die wichtigsten Fragen der Differentialrechnung der reellen Funktionen mit einer Variablen betrachtet: Eigenschaften der reellen Zahlen, Elemente der Mengenlehre, Begriff der reellen Funktion, Konvergenz der reellen Zahlenfolgen, Stetigkeit von Funktionen, Differenzierbarkeit der Funktionen (Mittelwertsätze, Taylorsche Formel und Reihe), axiomatische Definition der Logarithmusfunktion, der Exponentialfunktion und der Winkelfunktionen und ihre Eigenschaften.

Verf. geht von einem Axiomensystem für die reellen Zahlen aus, dann baut er die Theorie kompakt und lückenlos, in einer modernen Auffassung auf. Die einzelnen Axiome und Begriffe werden mit entsprechenden Aufgaben und Bemerkungen erläutert.

K. Tandori (Szeged)

E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 30), XI+198 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961; second revised printing, 1965.

Since the classic work on inequalities by HARDY, LITTLEWOOD and PÓLYA, appeared in 1934, the importance of inequalities in different branches of mathematics increased and changed in such a way that a new summary of the new discoveries, results and applications has become necessary. Let us only mention the theory of differential equations, the theory of games, and mathematical economics.

The book consists of five chapters. The first chapter contains the fundamental inequalities, beginning with the inequality between the arithmetic and geometric means, for which various proofs are given. Of course some inequalities and theorems only are mentioned, without proofs, but at the end of every chapter very detailed bibliographical notes are given. In chapter 2 a variety of interesting inequalities on matrices is discussed. After considering positive definite matrices and some simpler results, more intricate theorems are obtained by an integral representation of determinants, due to INGHAM and SIEGEL. In the second half of this chapter one finds results about positive matrices. These matrices play an important role e. g. in the study of computational algorithms for the numerical solution of partial differential equations. Chapter 3 deals with moment spaces and resonance theorems. Some of the paragraphs: Moments; Convexity; L^p-space; A result of F. RIESZ; Non-negative Trigonometric and Rational Polynomials; A Resonance Theorem of LANDAU; The Theory of Linear Inequalities; The Min-Max Theorem of VON NEUMANN. Chapter 4 deals with the following theme: "Given a set of functions $\{u\}$ satisfying certain side conditions, and an operator L that can be applied to the functions of this set, determine when the inequality $L(u)\geqq 0$ implies that $u\geqq 0$". The attention is focused upon ordinary and partial differential operators. In Chapter 5 inequalities for differential operators are considered. This chapter includes inequalities of B. SZ.-NAGY, HALPERIN, VON NEUMANN, CARLSON, WIRTINGER, etc. concerning e. g. inequalities between a function u and its derivatives $u^{(k)}$ and $u^{(n)}$.

Summing up: the book presents an enormous quantity of results from different branches of mathematics, lucidly arranged and with very useful hints to the literature.

The success of the book is marked by the fact that a second printing of it has been already necessary.

L. Pintér (Szeged)